TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 08

La integral de Lebesgue

Definiciones y resultados previos:

I. $\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ y $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ denotan la $\sigma-$álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$ y la $\sigma-$álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{R}$, respectivamente.

II. Una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier conjunto $B \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

III. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) = \sigma(\mathcal{A})$. Entonces una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $B \in \mathcal{A}$.

IV. Una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes propiedades:

1. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (-\infty, y]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $y \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $y \in \overline{\mathbb{R}}$.
3. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y)\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $y \in \overline{\mathbb{R}}$.
4. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$.
5. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y)\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$.

V. Una función medible $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es simple si tiene la forma $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{E_k}$, donde $b_1, \ldots, b_m$ son números reales y $E_1, \ldots, E_m$ son conjuntos medibles.

VI. Si $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{G_k}$ es una función simple entonces el conjunto de los valores que toma es finito. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto formado por todos los distintos posibles valores no nulos de φ y, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea $E_k = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = a_k\}$, entonces los conjuntos $E_1, \ldots, E_n$ son ajenos por parejas y $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$. Esta última sumatoria será llamada la **representación canónica** de φ.

VII. Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

VIII. Sea $g_1 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ... una sucesión de funciones medibles, entonces:

1. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, las funciones $\min\{g_1, \ldots, g_n\}$ y $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ son medibles.
2. Las funciones $\inf\{g_1, g_2, \ldots\}$ y $\sup\{g_1, g_2, \ldots\}$ son medibles.

IX. Sea $f_1 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ... una sucesión de funciones medibles, entonces las funciones $\liminf f_n$ y $\limsup f_n$ son medibles.

X: Sea $g_1 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ... una sucesión de funciones medibles tales que $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} g_n(x)$ existe para cualquier $x \in \mathbb{F}$, entonces la función $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$ es medible.

XI: Si una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces f^+ y f^- son medibles.

XII. Sean $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $f + c$, cf, $f + g$ y fg son medibles.

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{si } f(x) + g(x) \text{ está definida} \\ 1 & \text{si } f(x) + g(x) \text{ no está definida} \end{cases}$$

XIII. Sean $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $g = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces g es medible.

La integral de funciones medibles simples no negativas

Definición 1. *Si φ es una función simple no negativa con representación canónica $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$, se define la integral de φ, $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda$, de la siguiente manera:*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(E_k)$$

Como una función simple puede tener varias representaciones, es necesario hacer ver que se puede obtener la integral de la función teniendo cualquiera de sus representaciones.

Lema 1. *Sea $\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j}$ una función simple no negativa, donde los conjuntos $F_1, \ldots, F_m$ son ajenos por parejas, con representación canónica $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$, entonces:*

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \lambda\left(F_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\left(E_k\right)$$

Demostración

Para $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene $E_k = \cup_{\{j \in \{1,\ldots,m\}: b_j = a_k\}} F_j$, así que:

$\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\left(E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{\{j \in \{1,\ldots,m\}: b_j = a_k\}} \lambda\left(F_j\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{j \in \{1,\ldots,m\}: b_j = a_k\}} b_j \lambda\left(F_j\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda\left(F_j\right)$

■

Proposición 1. *Sea $\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j}$ una función simple, donde los coeficientes $b_1, \ldots, b_m$ son no negativos, con representación canónica $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$, entonces:*

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \lambda\left(F_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\left(E_k\right)$$

Demostración

Los términos de la sumatoria $\sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j}$ en los cuales $b_j = 0$ pueden eliminarse, así que podemos asumir que $b_1, \ldots, b_m$ son números reales positivos.

Sea $F = \cup_{j=1}^{m} F_m$, $T = \{1, \ldots, m\}$ y, si $A = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset T$ y $T - A = \{j_1, \ldots, j_{m-k}\}$, definamos:

$F_A = F \cap F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \cap F_{j_1}^c \cap \cdots \cap F_{j_{m-k}}^c$

$c_A = b_{i_1} + \cdots + b_{i_k}$

Entonces $F = \cup_{A \subset T} F_A$, $F_i = \cup_{\{A \subset T: i \in A\}} F_A$ y, si A y B son dos subconjuntos distintos de T, F_A y F_B son ajenos. Por lo tanto:

$$\lambda\left(F_j\right) = \sum_{\{A \subset T: j \in A\}} \lambda\left(F_A\right)$$

Así que:

$\sum_{j=1}^{m} b_j \lambda\left(F_j\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{\{A \subset T: j \in A\}} \lambda\left(F_A\right)$

$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\{A \subset T: j \in A\}} b_j \lambda\left(F_A\right) = \sum_{A \subset T} \sum_{j \in A} b_j \lambda\left(F_A\right)$

$= \sum_{A \subset T} c_A \lambda\left(F_A\right)$

Además, si $x \in F_A$ y $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $\varphi(x) = b_{i_1} + \cdots + b_{i_k} = c_A$, por lo tanto $\varphi = \sum_{A \subset T} c_A I_{F_A}$.

Así que se tiene:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j} = \sum_{A \subset T} c_A I_{F_A}$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \lambda(F_j) = \sum_{A\subset T} c_A \lambda(F_A)$$

Pero como $\sum_{i=1}^{n} a_i I_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j}$, se tiene $\sum_{i=1}^{n} a_i I_{E_i} = \sum_{A\subset T} c_A I_{E_A}$, así que, por el lema anterior:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \lambda(F_j) = \sum_{A\subset T} c_A \lambda(F_A) = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(E_k)$$

$\blacksquare$

Corolario 1. *Sea $\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j I_{F_j}$ una función simple, donde los coeficientes $b_1, \ldots, b_m$ son no negativos, entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda = \sum_{j=1}^{m} b_j \lambda(F_j)$$

Proposición 2. *Sean φ y ψ dos funciones simples no negativas, entonces:*

1. *$\int_{\mathbb{R}} [a\varphi + b\psi]\, d\lambda = a\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda + b\int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda$ para cualesquiera números reales a y b no negativos.*
2. *Si $\varphi \leq \psi$, entonces $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda$.*

Demostración

1. Sean $\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ y $\sum_{k=1}^{m} b_k I_{F_k}$ las representaciones canónicas de φ y ψ, respectivamente. Entonces:

$$a\varphi + b\psi = \sum_{k=1}^{n} aa_k I_{E_k} + \sum_{k=1}^{m} bb_k I_{F_k}$$

Así que:

$\int_{\mathbb{R}} [a\varphi + b\psi]\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} aa_k \lambda(E_k) + \sum_{k=1}^{m} bb_k \lambda(F_k)$

$= a\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda + b\int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda$

2. Si $\varphi \leq \psi$, entonces $\psi - \varphi$ es una función simple no negativa y $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$, así que:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda + \int_{\mathbb{R}} [\psi - \varphi]\, d\lambda$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi d\lambda - \int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda = \int_{\mathbb{R}} [\psi - \varphi]\, d\lambda \geq 0.$$

$\blacksquare$

Definición 2. *Si φ es una función simple no negativa y E es un conjunto medible, se define:*

$$\int_E \varphi d\lambda = \int_{\mathbb{R}} I_E \varphi d\lambda$$

Teorema 1. *Sea φ una función simple no negativa. Entonces, la función $m : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $m(E) = \int_E \varphi d\lambda$, es una medida.*

Demostración

Obviamente, m es no negativa y, por la proposición anterior, es finitamente aditiva.

Sea $\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ la representación canónica de φ, A_n una sucesión creciente de conjuntos medibles y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces:

$$\int_{A_n} \varphi d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\left(A_n \cap E_k\right)$$

$$\int_{A} \varphi d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\left(A \cap E_k\right)$$

Así que:

$\text{lím}_{n \rightsquigarrow \infty} m(A_n) = \text{lím}_{n \to \infty} \int_{A_n} \varphi d\lambda = \text{lím}_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\left(A_n \cap E_k\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} a_k \, \text{lím}_{n \rightsquigarrow \infty} \lambda\left(A_n \cap E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda\left(A \cap E_k\right)$

$= \int_A \varphi d\lambda = m(A)$

La integral de funciones medibles no negativas

Para definir la integral de una función medible no negativa podríamos utilizar el hecho de que se puede aproximar, por abajo, mediante una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas y definiendo entonces la integral de la función como el límite de las integrales de las funciones simples que aproximan a la función. Con este método, sería necesario demostrar que el valor que se obtiene es el mismo para cualquier sucesión de funciones simples no negativas cuyo límite sea la función medible dada. La siguiente definición evita tener que hacer eso y es más cómoda de trabajar.

Definición 3. *Si $f : \mathbb{R} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible no negativa, se define la integral de f, $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, de la siguiente manera:*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

Definición 4. *Si f es una función medible no negativa y E es un conjunto medible, se define:*

$$\int_E f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} I_E f d\lambda$$

El siguiente resultado es inmediato:

Proposición 3. *Sean f y g dos funciones medibles no negativas, entonces*

a) Si $f \leq g$, entonces $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.

b) Si $f \leq g$ sobre un conjunto $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, entonces $\int_E f d\lambda \leq \int_E g d\lambda$.

Podemos demostrar inmediatamente el primero de los teoremas de convergencia de la integral, los cuales muestran claramente, para el caso de funciones definidas sobre $\mathbb{R}$, la superioridad de la integral de Lebesgue con respecto a la integral de Riemann

Teorema 2 (Teorema de la convergencia monótona). *Sea f_n una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas, entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}} \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} f_n d\lambda = \text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$$

Demostración

Sea $f = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} f_n$ y φ una función simple no negativa tal que $\varphi \leq f$, $\alpha \in (0,1)$ y $A_n = \{x \in \mathbb{R}: f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$. Entonces, la sucesión A_n es creciente y $\cup A_n = \mathbb{R}$. Además, la función $m : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $m(E) = \int_E \varphi d\lambda$, es una medida, así que:

$$\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{A_n} \varphi d\lambda = \int_{\mathbb{F}} \varphi d\lambda$$

Por otra parte, $\alpha \int_{A_n} \varphi d\lambda \leq \int_{A_n} f_n d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda = \alpha \, \text{lím}_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi d\lambda \leq \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$$

Haciendo tender α a 1, se obtiene entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda \leq \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{E}} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathbb{E}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f \ \right\} \leq \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Por otra parte, como $f \geq f_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{E}} f d\mu \geq \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

Así que:

$$\int_{\mathbb{E}} \text{lím}_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{\mathbb{E}} f d\mu = \text{lím}_{n\to\infty} \int_{\mathbb{E}} f_n d\mu$$

■

Proposición 4. *Sean f y g dos funciones medibles no negativas, entonces:*

1. $\int_{\mathbb{R}} [af + bg]\, d\lambda = a \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + b \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$ *para cualesquiera números reales* a *y* b *no negativos.*
2. $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0$ *si y sólo si* $\lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}\right) = 0$.

Demostración

Para la primera, sean φ_n y ψ_n dos sucesiones no decrecientes de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \psi_n(x) = g(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{F}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} [a\varphi_n + b\psi_n]\, d\lambda = a \int_{\mathbb{R}} \varphi_n d\lambda + b \int_{\mathbb{R}} \psi_n d\lambda$$

Así que, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} [af + bg]\, d\lambda = a \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + b \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$$

Para la segunda propiedad supongamos que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \left\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda \geq \int_{E_n} f d\lambda \geq \tfrac{1}{n}\lambda(E_n)$$

Si $\lambda(E_n)$ fuera positiva, se tendría $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda > 0$, por lo tanto $\lambda(E_n) = 0$.

Finalmente, $\lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}\right) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \lambda(E_n) = 0$.

Inversamente, supongamos que $\lambda\left(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}\right) = 0$ y sea φ una función medible simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$, entonces $\varphi = 0$ casi en todas partes, así que $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda = 0$; por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda : \varphi \text{ es simple y } 0 \leq \varphi \leq f\ \right\} = 0$$

■

Teorema 3. *Sea* f *una función medible no negativa. Entonces, la función* $m : \mathfrak{L}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$, *definida por* $m(E) = \int_E f d\lambda$, *es una medida.*

Demostración

Obviamente, m es no negativa y, por el inciso 1 de la proposición anterior, es finitamente aditiva.

Sea A_n una sucesión monótona no decreciente de conjuntos medibles y $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces, la sucesión de funciones $(I_{A_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} I_{A_n} f = I_A f$, así que, por el teorema de la convergencia monótona:

$$m(A) = \int_A f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} I_A f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} I_{A_n} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\lambda = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} m(A_n)$$

■

Recordatorio

I. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Se dice que un número real x es punto límite de (x_n) si existe una subsucesión de (x_n) que converge a x. También diremos que ∞ (resp. $-\infty$) es punto límite de (x_n) si existe una subsucesión de (x_n) que diverge a ∞ (resp. $-\infty$).

II. Si la sucesión (x_n) está acotada entonces existe por lo menos un número real x que es punto límite de (x_n).

III. Si una sucesión (x_n) no está acotada, entonces existe una subsucesión que diverge a ∞ o a $-\infty$, así que, toda sucesión tiene por lo menos un punto límite.

IV. Una sucesión (x_n) converge a $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si x es el único punto límite de (x_n).

V. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Definimos el límite superior de (x_n), $\limsup x_n$, y el límite inferior de (x_n), $\liminf x_n$, de la siguiente manera:

$$\liminf x_n = \inf \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ es punto límite de } (x_n) \right\}$$

$$\limsup x_n = \sup \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} : x \text{ es punto límite de } (x_n) \right\}$$

VI: Para cualquier sucesión (x_n), $\liminf x_n$ y $\limsup x_n$ son puntos límite de (x_n).

VII: Se tiene siempre $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

VIII. Una sucesión (x_n) es convergente si y sólo si $\liminf x_n = \limsup x_n \in \mathbb{R}$.

IX. Para cualquier sucesión (x_n) se tiene:

$$\liminf x_n = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \left(\inf_{j \geq n} \{x_j\} \right)$$

$$\limsup x_n = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \left(\sup_{j \geq n} \{x_j\} \right)$$

Teorema 4 (**Lema de Fatou**). *Sea $\{f_n\}_{n \in N}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightsquigarrow \infty} f_n d\lambda \leq \liminf_{n \rightsquigarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$$

Demostración

La sucesión $g_n = \inf \{f_j : j \geq n\}$ es no decreciente y $\liminf_{n \rightsquigarrow \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} g_n$, así que, por el teorema de la convergencia monótona:

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightsquigarrow \infty} f_n d\lambda = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda$$

Por otra parte, $g_n \leq f_j$ para cualquier $j \geq n$, así que:

$$\int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda \leq \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_j d\lambda : j \geq n \right\}.$$

Por lo tanto:

$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\rightsquigarrow\infty} f_n d\lambda = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda$

$\leq \lim_{n\rightsquigarrow\infty} \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} f_j d\lambda : j \geq n \right\} = \liminf_{n\rightsquigarrow\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$

$\blacksquare$

Teorema 5. *Si f es una función medible no negativa tal que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$, entonces f es finita casi en todas partes.*

Demostración

Sea $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$, entonces $\int_{\mathbb{R}} f I_\Gamma d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda < \infty$.

Supongamos $\mu(\Gamma) > 0$ y definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in \Gamma \\ 0 & \text{si } x \notin \Gamma \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, φ_n es una función simple tal que $0 \leq \varphi_n \leq f I_\Gamma$; así que $\int_{\mathbb{R}} f I_\Gamma d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n d\lambda = n\lambda(\Gamma)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\int_{\mathbb{R}} f I_\Gamma d\lambda = \infty$, lo cual es una contradicción.

$\blacksquare$